Cohomology 作用素について

根　岸　愛　子

1. まえがき

最近代数的位相幾何学の分野で，cohomology 作用素の理論が，Steenrod, Eilenberg, Cartan, Serre, Thomas などによって盛んに研究されている．cohomology 作用素を構成するのに二つの方法があって，その一つは複体の n 個の積と，その各因子に対する対称群の作用を用いる方法，[18] 他の一つは Eilenberg-MacLane 複体を用いる方法[10, 13] である．前者は色々と便利な性質をもつ特殊な作用素を与えるに都合がよく，後者はすべての作用素を与える．この両者は同じ結果をもたらすものであって，一つにまとめることが出来る筈であるが，この二つの方法を完全に結びつける方法はまだ発見されていない[19]．しかし，これらの間を関係づける手掛りが Dold-Thom[7] によって，与えられたので，この関係について少し考察してみたいと思う．

2. cohomology 作用素

位相数学の問題は多くは位相空間とその写像の問題に帰着される．特に次に述べる拡張問題は，位相数学において重要な位置を占めている．

X, Y を位相空間, A を X の閉集合とする．$h : A \to Y$ を写像即ち A から Y への連続函数とする．写像 $f : X \to Y$ がすべての $x \in A$ に対して，$f(x) = h(x)$ となるならば，f を h の拡張と呼ぶ．g を $A \to X$ なる包含写像とするとき，

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h"'] & & Y \end{tikzcd} \qquad f \circ g = h$$

となることである．X, Y, A を与えるとき h の拡張 f が存在するか？というのが拡張問題である．

例．Urysohn の Lemma

X は正規空間, $A = A_0 \cup A_1$ は二つの disjoint な閉部分集合の和

集合，Y は実数の区間 $[0,\ 1]$ であって，$h(A_0)=0$，$h(A_1)=1$ である．このとき拡張 f が常に存在するというのが Lemma の主張である．

その他，多くの問題をこの拡張問題になおすことが出来る．これらの拡張問題は未解決のものが多いが，これを解く一般的な方法として，幾何学的な問題を代数的な問題に変換する代数的位相幾何学の方法が有効である．即ち，位相から代数への functor として，homology 群，cohomology 群，homotopy 群などが用いられる．例えば上の拡張問題は空間と写像の関係に対して次のような homology 群とその準同型写像の関係を置きかえることが出来る．

$$\begin{tikzcd} & H_q(X) \arrow[dr, "f_*"] & \\ H_q(A) \arrow[ur, "g_*"] \arrow[rr, "h_*"'] & & H_q(Y) \end{tikzcd} \qquad f_*\circ g_*=h_*$$

これによって或種の問題は解ける．しかし簡単な問題に対しては有効であるが，すべてに有効ではない．なぜならば，代数的問題に変換する際に幾何学的なものが一部失われるからである．従って幾何学的問題をもっと鋭く代数的に描けるように，代数の構造を改良して行くことが我々の課題となる．そこで homology の代りに cohomology 群が用いられる．この場合は写像の向が反対になり，次のような関係となる．

$$\begin{tikzcd} & H^*(X) \arrow[dl, "g^*"'] & \\ H^*(A) & & H^*(Y) \arrow[ul, "f^*"'] \arrow[ll, "h^*"] \end{tikzcd} \qquad g^*\circ f^*=h^*$$

cohomology 群は単なる加群ではなくて，環構造をもっている．即ち，$u\in H^p(Y)$，$v\in H^q(Y)$ に対して，cup 積 $u\smile v\in H^{p+q}(Y)$ をもっている．この積は双一次的であって交換法則 $u\smile v=(-1)^{pq}v\smile u$ を満足する．$f:X\to Y$ は $f^*(u\smile v)=f^*(u)\smile f^*(v)$ をひきおこすので，$g^*\circ f^*=h^*$ の解 f^* は環準同型でなければならないから，代数的問題はさらに堀下げられる．また homotopy 群も用いられるが，homotopy 群の計算は Hurewicz の定理によって，特別の場合 homology 群の計算に帰着せられるほか，大ていの場合実際の計算は大変困難である．こゝで我々は cohomology 理論の考察を推進して cohomology に出来る

だけ多くの構造を持込むことを考える．上述の cup 積の他に，

1. 係数群の準同型 $h: G \to G'$ によってひきおこされる準同型

$$h^*: H^q(K;\ G) \longrightarrow H^q(K;\ G')$$

2. 係数群の完全系列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ によってひきおこされる準同型，即ち境界作用素 (Bockstein 作用素)

$$\delta^*: H^q(K;\ C) \longrightarrow H^{q+1}(K;\ A)$$

3. square operation [1, 13, 14]

$$Sq^i: H^q(K;\ Z_2) \longrightarrow H^{q+i}(K;\ Z_2)$$

(以下 Z_m は mod m の整数環．$Z_0 = Z$ は整数環を表わす)

4. cyclic reduced p-th power operation [16, 17, 20]

$$\mathfrak{P}^i_p: H^q(K;\ Z_p) \longrightarrow H^{q+2i(p-1)}(K;\ Z_p)$$

p は素数，$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots$

5. Pontrjagin p-th power operation [21, 22]

$$P_p: H^{2q}(K;\ Z_{p^k}) \longrightarrow H^{2pq}(K;\ Z_{p^{k+1}})$$

などが次々と考えられた．これらが見出され動機はそれぞれ相異り，独特の意義をもっていた．例えば Sq^i は障害理論の研究の際導かれた Sq^2 を拡張したものである．しかし，$\mathfrak{P}^i_p$ は $p=2$ のとき，Sq^{2i} であり，P_p は $p=2$ のとき，Pontrjagin が最初に見出した Pontrjagin square $P_2: H^{2q}(K;\ Z_{2m}) \to H^{4q}(K;\ Z_{4m})$ であって，このような作用素は cohomology 作用素なる名称の下に統括される．

一般的にいえば，次元 q, r と係数群 G, G' に関する cohomology 作用素 $\theta(q, G;\ r, G')$ とは，各空間 K に対して与えられ函数

$$T_K: H^q(K;\ G) \longrightarrow H^r(K;\ G')$$

で，各写像 $f: K \to K'$ に対して $f^* T_{K'} = T_K f^*$ を満すものの集りであると定義することが出来る．T, $T' \in \theta(q,\ G;\ r,\ G')$ に対して加法を $(T+T')_K = T_K + T'_K$ と定めれば $\theta(q, G;\ r, G')$ は可換群である．

3. Reduced power operations

K を regular cell 複体，$S(n)$ を n 次の対称群，Π をその部分群

とし，W を Π-free acyclic な複体とする（即ち，W に Π が作用していて W の任意の cell が Π の異る元によって異る cell にうつされ，かつすべての homology 群が 0 である）. $K^*=\mathrm{Hom}(K,Z)$ は K に附随する整係数の cochain 複体とする. $K^n=K\times\ldots\ldots\times K$ を K の n 個の積空間とする. $K^{*n}=K^{n*}$ と考えてよい. W と K^{*n} の tensor 積 $W\otimes K^{*n}$ は次のようにして cochain 複体になる. cochain group を $C^r(W\otimes K^{*n})=\sum_{i=0}^{\infty}C_i(W)\otimes C^{r+i}(K^{*n})$ で定義し，coboundary operation $\bar{\delta}$ を

$$\bar{\delta}(w\otimes v)=\partial w\otimes v+(-1)^i w\otimes\delta v$$

で定義する. こゝで $w\in C_i(W)$, $v\in C^{r+i}(K^{*n})$, ∂ は chain 複体 W の boundary operator, δ は K^{*n} の coboundary operator である.

積複体 $W\otimes K$ から K^n への写像の diagonal carrier $C(w\otimes\sigma)=|\sigma|^n$ を用いて equivariant な chain map $\phi: W\otimes K\to K^n$ が存在することが知られているが，[16] この ϕ の dual として $\phi': W\otimes K^{*n}\to K^*$ を次のように定める.

$$\phi'(w\otimes v)\cdot\sigma=(-1)^{i(i-1)/2}v\cdot\phi(w\otimes\sigma)$$

こゝに $i=\dim w$, σ は K の chain でその次元は $\dim v-1$ に等しい. Π の $W\otimes K^{*n}$ への作用を $T(w\otimes v)=Tw\otimes Tv$, $T\in\Pi$, によって定義すると，$T(w\otimes v)-w\otimes v$ なる形の cochain から生成される部分複体による商複体として $W\otimes_\pi K^{*n}$ を得る. ϕ' は自然に chain map

$$\phi'': W\otimes_\pi K^{*n}\longrightarrow K^*\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

を定める.

次に u を $\bar{u}\in H^q(K^*,Z_\theta)$ （θ は負でない整数）の代表元とする. u を整係数の cochain と見なすと，$\delta u=\theta v$ である. この u と v によって生成される加群は K^* の部分複体 $M=M(\theta,q)$ をつくる. $f: M\to K^*$ を chain map とすると，fu は cocycle mod θ であって cohomology class $\bar{u}$ を定める. $f^n: M^n\to K^{*n}$ は equivariant であり，$\psi=1\otimes_\pi f^n$ とするとき，

$$\psi: W\otimes_\pi M^n\longrightarrow W\otimes_\pi K^{*n}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

は chain map である.

(1), (2) を続けて, G との tensor 積をつくる. これも同じ ψ, ϕ であらわすと,

$$W\otimes_\pi M^n\otimes G \xrightarrow{\psi} W\otimes_\pi K^{*n}\otimes G \xrightarrow{\phi} K^*\otimes G$$

が得られる. そしてこれから cohomology 準同型写像

$$H^r(W\otimes_\pi M^n\otimes G) \xrightarrow{\psi^*} H^r(W\otimes_\pi K^{*n}\otimes G) \xrightarrow{\phi^*} H^r(K^*\otimes G) = H^r(K;\, G)$$

を得る.

$$\Phi = \psi^*\circ\phi^*:\ H^r(W\otimes_\pi M^n\otimes G) \longrightarrow H^r(K;\, G)$$

は, ϕ と u のとり方によって定義されているが二つの上のような ϕ は equivariant に homotopic であるから, ϕ のとり方には無関係であって (すべての r に対する) Φ の像を $\bar{u}\in H^q(K;\, Z_\theta)$ の Π**-reduced power** とよぶ.

Steenrod はこれを用いて次の基本定理を証明した[18, 20]. 証明は長いのでこゝに定理のみを述べる.

3. 1. [定理]

$\bar{u}\in H^q(K;\, Z_\theta)$ とすると, $\bar{u}$ のすべての reduced powers の集合は, $\bar{u}$ と次の五つの primitive operations とから生成される.

1. $H^r(K;\, G)$ における加法
2. 係数群の準同型写像 $h: G\to G'$ によってひきおこされる作用素

$$h^*:\ H^r(K;\, G)\longrightarrow H^r(K;\, G')$$

3. 係数群の完全系列 $0\to A\to B\to C\to 0$ によってひきおこされる Bockstein 作用素

$$\delta^*:\ H^r(K;\, C)\longrightarrow H^{r+1}(K;\, A)$$

4. cup 積　　$H^p(K;\, A)\otimes H^q(K;\, B)\longrightarrow H^{p+q}(K;\, A\otimes B)$
5. Π を巡回群とするとき, $H^q(K;\, Z_\theta)$ の元の Π-reduced power 作用素

$$\mathfrak{P}_p^i:\ H^q(K;\, Z_p)\longrightarrow H^{q+2i(p-1)}(K;\, Z_p)$$

$$P_p:\ H^{2q}(K;\, Z_{p^k})\longrightarrow H^{2pq}(K;\, Z_{p^{k+1}})$$

$\bar{u}\in H^q(K;Z_\theta)$ に対して $\xi\in H^r(W\otimes_\pi M^n\otimes G)$ とするとき，$\Phi(\xi)\in H^r(K;G)$ がきまる．これは ξ と $\bar{u}$ によっているので $\xi(\bar{u})$ ともかく．即ちこれによって $\xi: H^q(K;Z_\theta)\to H^r(K;G)$ なる cohomology operation が定義されるのである．

4. Eilenberg-MacLane 複体

cohomology operation を研究するもう一つの方法として Eilenberg-MacLane (Π, n) 空間という特殊の複体を用いる方法がある．

4. 1. ［定義］

弧状連結な空間 Y が，Π を可換群，n を正整数とするとき，
$\pi_n(Y)\approx\Pi$，$\pi_i(Y)=0$ $(i\neq n)$ （$\pi_k(Y)$ は Y の k 次の homotopy 群）となるならば，Y を $(\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{n})$-**空間**という．

例 1. 円 S^1 は $(Z, 1)$-空間である．

例 2. 無限次元実射影空間 $P^\infty(R)$ は $(Z_2, 1)$-空間である．

例 3. 無限次元複素射影空間 $P^\infty(C)$ は $(Z, 2)$-空間である．

一般に (Π, n) という組を与えたとき，(Π, n)-空間が存在するということは，半単体的複体を用いて証明することが出来る[10]．そして，homotopy 分類定理を用いると，複体の範囲ではどのような (Π, n)-空間も同じ homotopy type をもつことがわかるので，$H_*(Y;G)$ と $H^*(Y;G)$ は Π と n とにしかよらない．従って $H^*(Y;G)$ を $H^*(\Pi, n;G)$ とかく．

4. 2. ［定理］

$$\theta(q, G; r, G')\approx H^r(G, q; G')$$

証明．$T\in\theta(q, G; r, G')$，$T: H^q(Y;G)\to H^r(Y;G)$ とする．Y を (G, q)-空間とし，Y の基本類を $u_0\in H^q(G, q;G)=H^q(Y;G)$ とすると，$Tu_0\in H^r(G, q;G')$ である．T, T' を $Tu_0=T'u_0$ となるような作用素とし，Xを複体，$u\in H^q(X;G)$ とする．homotopy 分類定理より写像 $f: X\to Y$ を $f^*u_0=u$ となるようにとることが出来るので

$$Tu=Tf^*u_0=f^*Tu_0=f^*T'u_0=T'f^*u_0=T'u$$

であって $\theta(q, G; r, G')$ で $T=T'$ である．

次に $w\in H^r(G;q;G')$ とするとき，これに対応する $T\in\theta(q, G;$

r, G') を定めることが出来れば定理は証明されたことになる. Xを任意の複体, $u \in H^q(X; G)$ とする. 写像 $f: X \to Y$ を $f^* u_0 = u$ となるように選び, $Tu = f^* w$ とおく. こゝで $X = Y$, $u = u_0$, $f = \text{identity}$ とおくと, $Tu_0 = w$ となる.

5. 対称積

Dold-Thom によって与えられた定理を証明するために先づ対称積を定義する.

5. 1. [定義]

X を位相空間とする. 積空間 $X^q = X \times \cdots\cdots \times X$ を $S(q)$ によって同値な点を同一視することによって, 潰して得られる空間を **q 次の対称積** $SP^q(X)$ という. $[x_1 \cdots\cdots, x_q] \in SP^q(X)$ を $(x_1 \cdots\cdots, x_q) \in X^q$ によって定義される点とする.

例. $X = S^2$ (2 次元球面) とすると, $SP^q(S^2) \approx P^q(C)$

である.

なぜならば, S^2 を複素球面と考えると, $SP^q(S^2) \ni [a_1, \cdots\cdots, a_q]$, ($a_i$ は複素数) に対して, $a_1, \cdots\cdots, a_q$ を零点にもつような q 次の多項式の係数を $P^q(C)$ の斉次座標として対応させることが出来るからである.

5. 2. [定義]

X の中に基点 x_0 を定め, 埋め込み $i_q: SP^q(X) \to SP^{q+1}(X)$ を $i_q[x_1, \cdots\cdots, x_q] = [x_0, x_1, \cdots\cdots, x_q]$ と定義する.

$$X = SP^1(X) \xrightarrow{i_1} SP^2(X) \xrightarrow{i_2} \cdots\cdots \longrightarrow SP^q(X) \xrightarrow{i_q} \cdots\cdots$$

なる系列の極限をもって**無限次元対称積** $SP(X)$ とする. 即ち
$SP(X) = \bigcup_{q=1}^{\infty} SP^q(X)$ 但し, $[x_1, \cdots\cdots, x_q] \sim [x_0, x_1, \cdots\cdots, x_q]$ である.

以後空間は CW-complex とする.

5. 3. [定義]

連続写像 $f: X \to Y$ に関する **mapping cylinder** Z_f とは $X \times I + Y$ ($I = [0, 1]$) において $X \times 1 \ni (x, 1)$ を $f(x) \in Y$ と同一視し, $x_0 \times I$ を一点 (これを Z_f の基点とする) にちゞめたものとする.

X, Y は $X \sim X \times 0$, $Y \sim Y$ と考えて, Z_f の部分空間である. fは

包含写像 $X \subset Z_f$ に homotopic である.

5. 4. [定義]

$X \subset Z_f$ を一点にちゞめることによって得られる空間を **mapping cone** C_f という.

写像 $Z_f \to C_f$ において $Y \to C_f$ なる包含写像を Pf とする. $X = Y$, $f = \text{identity}$ とおくと, $C_f = CX$ 即ち X の上の cone である.

5. 5. [定義]

C_f の中で $Pf(Y) \approx Y$ を一点にちゞめて出来る空間を X の**懸垂**といゝ EX であらわす.

EX は f に無関係で X のみによってきまる. 即ち, EX は $X \times I$ で $X \times 0 \cup X \times 1 \cup 0 \times I$ を一点にちゞめることによって得られる.

$Ef: EX \to EY$ を $f \times id.: X \times I \to Y \times I$ によって定義される写像とする.

我々は Eilenberg-Steenrod の homology 理論の公理系を修正して次のように定める.

5. 6. [公理]

位相空間 X と整数 q に対してきまる可換群 $H_q(X)$ と, 写像 $f: X \to Y$ がひきおこす準同型写像 $f_*: H_q(X) \to H_q(Y)$ が次の公理をみたす

1. $(id.)_* = \text{identity}.$
2. $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$
3. $f \sim g$ ならば　$f_* = g_*$
4. すべての X に対して同型写像 $\mathfrak{E}: H_q(X) \cong H_{q+1}(EX)$ が存在して図式

$$\begin{array}{ccc} H_q(X) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y) \\ \mathfrak{E} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{E} \\ H_{q+1}(EX) & \xrightarrow[(Ef)_*]{} & H_{q+1}(EY) \end{array}$$

は可換である. 即ち $\mathfrak{E} \circ f_* = (Ef)_* \circ \mathfrak{E}$

5. すべての連続写像 $f: X \to Y$ に対して

$H_q(X) \xrightarrow{f_*} H_q(Y) \xrightarrow{(Pf)_*} H_q(C_f)$ は完全系列である.

6. $H_q(S^1)=0 \quad (q \neq 1)$
   $H_q(S^0)=0 \quad (q \neq 0)$ 　但し S^0 は二点をあらわす.
7. X に対して X のコンパクトな部分空間で x_0 を含む空間の集合 $\{X_\lambda\}$ を考える. 包含写像

$$i_\mu^\lambda : X_\lambda \longrightarrow X_\mu (X_\lambda \subset X_\mu)$$
$$i^\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$$

は群 $H_q(X_\lambda)$ の準同型写像をひきおこすが $i_*^\lambda: H_q(X_\lambda) \longrightarrow H_q(X)$ の極限を

$$i_*: \lim H_q(X_\lambda) \longrightarrow H_q(X) \text{ とすると}$$
$$i_*: \lim H_q(X_\lambda) \cong H_q(X) \text{ である.}$$

5. 7. [定理]

X を連結な CW-complex とするとき,

$$h_q(X) = \begin{cases} 0 & q<1 \\ \pi_q(SP(X)) & q \geqq 1 \end{cases}$$

$f: X \to Y$ によってひきおこされる準同型写像を

$$\tilde{f}_*: h_q(X) \longrightarrow h_q(Y) = \begin{cases} 0 & q<1 \\ \bar{f}_* & q \geqq 1 \end{cases}$$

(たゞし, $\bar{f}: SP(X) \to SP(Y)$ である.)

とするとき群 $h_q(X)$ は公理 5. 3. の 1—7 を満足する.

証明. 1—3 は明らかであるから, 4—7 について証明の大略を述べる.

4. 写像 $p: CX \to EX$ は, 基底空間が $SP(EX)$, fibre が $SP(X)$ であるような fibring $SP(CX) \to SP(EX)$ をひきおこす. これに対する homotopy 完全系列

$$\cdots\cdots \longrightarrow \pi_{q+1}(SP(X)) \longrightarrow \pi_{q+1}(SP(CX)) \xrightarrow{p_*} \pi_{q+1}(SP(EX))$$
$$\xrightarrow{\varDelta} \pi_q(SP(X)) \longrightarrow \cdots\cdots$$

において, CX は可縮であるから $\pi_{q+1}(SP(CX))=\{0\}$ となり, $\varDelta$ は同型写像である. 故に $\mathfrak{E}'=\varDelta^{-1}$ とおけばこれが公理を満足する.

5. 写像 $p': Z_f \to C_f$ に対する fibring $SP(Z_f) \to SP(C_f)$ の homotopy 完全系列

$$\cdots\cdots \longrightarrow \pi_q(SP(X)) \longrightarrow \pi_q(SP(Z_f)) \xrightarrow{p'_*} \pi_q(SP(C_f)) \longrightarrow \cdots\cdots$$

において, $f: X \to Y$ は包含写像 $X \subset Z_f$ に, Pf は p' に homotopic であるから上の系列の一部分として

$$\pi_q(SP(X)) \xrightarrow{\tilde{f}_*} \pi_q(SP(Y)) \xrightarrow{Pf_*} \pi_q(SP(C_f))$$

は完全系列である.

6. S^1 の表現として複素球面 $S^2-0-\infty$ を考える. $P^q(C)=SP^q(S^2)$ であるからこれから $SP^q(S^1)$ は S^1 と同じ homotopy 型をもつ. 故に $\pi_i(S^1) \approx \pi_i(SP^q(S^1))$ であって $H_q(S^1)=0$ $(q \neq 1)$ である.

7. $i^\lambda: X_\lambda \to X$ は $SP(X_\lambda) \to SP(X)$ をひきおこす. この極限を考えれば, $i: \lim_\lambda SP(X_\lambda) \to SP(X)$ は一意的で連続である. この逆は $SP(X)$ の compact な部分空間 K に対して連続となる. 整数 q が存在して $K \subset SP^q(X)$ である. すべての K に対して $K \subset SP(X_\lambda)$ となることがいえれば証明は終る. $X^q \xrightarrow{j} SP^q(X)$, $X^q \xrightarrow{p} X$ において $j^{-1}(K)=K'$, $p(K')=K_\nu$ とすると, $K' \subset (\cup_\nu K_\nu)^q$ であり, $K \subset SP^q(\cup_\nu K_\nu) \subset SP(\cup_\nu K_\nu)$ である.

今 $\{H_q(X); \mathfrak{E}; f_*\}$ と $\{H_q'(X); \mathfrak{E}'; f_*'\}$ が, 公理 5. 6. を満足する二つの functor で, 準同型写像 $j_1: H_1(S^1) \to H_1'(S^1)$ が与えられているとすると, この system の間の同値関係を与える準同型写像 $j: H_q(X) \to H_q'(X)$ が存在して次の二つの図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} H_q(X) & \xrightarrow{\mathfrak{E}} & H_{q+1}(EX) \\ j\downarrow & & \downarrow j \\ H_q'(X) & \xrightarrow[\mathfrak{E}']{} & H'_{q+1}(EX) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_q(X) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y) \\ j\downarrow & & \downarrow j \\ H_q'(X) & \xrightarrow[f_*']{} & H_q'(Y) \end{array}$$

このことと定理 5. 7. からたゞちに次の定理が出てくる.

5. 8. [定理] (Dold-Thom)

$$j: H_q(X; Z) \approx \pi_q(SP(X)) \qquad (q>0)$$

$$q=1 \text{ のときは, } j: \pi_1(S^1)=H_1(S^1, Z) \to \pi_1(SP(S^1))$$

は包含写像 $S^1 \subset SP(S^1)$ からひきおこされる同型写像である.

また，次の図式において，h, h' を Hurewicz の準同型写像とすると，$i=j\circ h$ である．

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(X) & \xrightarrow{\ i\ } & \pi_r(SP(X)) \\ h\big\downarrow & \overset{j}{\nearrow} & \big\downarrow h' \\ H_r(X) & \xrightarrow[\ i_*\ ]{} & H_r(SP(X)) \end{array}$$

しかし，一般に $i_*=h'\circ j$ とはならない．

証明．$H_q(X)$ を X の q 次元 homology 群，f_* を f からひきおこされる homology 群の準同型写像，$h_q(X)$ は定理 5.7 における群とすると $\{H_q(X);\mathfrak{C};f_*\}$ と $\{h_q(X);\mathfrak{C}';\tilde{f}_*\}$ は公理 5.6 を満足する二つの functor になるからである．

6. Eilenberg-MacLane 複体の構成

定理 5.8 から，4 で定義した Eilenberg-MacLane 複体を作る方法がわかる．$\pi_i(SP^\infty(X))\approx H_i(X)$ であるから，ある整数 n と可換群 Π に対して，$H_n(X)=\Pi$, $H_i(X)=0$ $(i\neq n)$ となるような空間 X を作れば $SP^\infty(X)$ が求める (Π, n)-空間となる．このような空間 X を作るのは容易である．可換群は巡回群の直和としてあらわせるから巡回群 Π について考えればよい．Π が位数 p の巡回群ならば，X はS^n に $(n+1)$ 次胞体をその縁に写像度 p でつけて得られる空間である．また，$H_n(X)$ が巡回群の直和であるときは，X は一点を共通する S^n の束に適当な写像度で $(n+1)$ 次胞体をつけて得られる空間である．このようにして作った X の無限次元対称積 $SP^\infty(X)$ を作れば (Π, n)-空間を得ることが出来る．

例．$H_n(S^n)=Z$, $H_i(S^n)=0$ $(i\neq n)$ であるから，$SP^\infty(S^n)$ は (Z, n)-空間である．

しかもこのようにして作った (Π, n)-空間は，鎖複体 $C(SP^\infty(X))$ が次のように分解出来るのでその構造を知ることが出来る．

6. 1. [定理]

$SP^k(X)$ の部分複体 U_k が存在して

$$C(SP^k(X))\approx C(SP^{k-1}(X))+U_k$$

証明．X を半単体的複体とみなす．即ち，n-単体の集合を

X^n $(n = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$ とするとき辺作用素 ∂_i: $X_n \to X_{n-1}$, 退化作用素 s_i: $X_n \to X_{n+1}$ をもち，この間に次のような関係がある．

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \quad (i < j), \qquad s_i s_j = s_j s_{i-1} \quad (i > j)$$

$$\partial_i s_i = \partial_{i+1} s_i = id., \qquad \partial_i s_j = s_j \partial_{i+1} \quad (i > j+1)$$

X の基点 x_0 を 0-単体と考えてこれを e で表わす．s_0 を退化作用素とするとき，$(s_0)^q e = e_q$ とあらわす．$e_q \in X_q$ である．$SP^k X$ の q-単体は，$x_1, \ldots\ldots, x_k \in X_q$ の順序をつけない列である．もしこの中に $x_i = e_q$ となる x_i があるならば，そのときに限り上の q-単体，$x_1, \ldots\ldots, x_k$ は $SP^{k-1}(X)$ に入る．q 次元鎖として $(x_1 - e_q)(x_2 - e_q)\ldots\ldots(x_k - e_q)$ で生成されるものを考え，$q = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ とすると，このような鎖は辺作用素又は退化作用素によって，不変又は 0 となるから，$SP^k(X)$ の部分複体となる．これを U_k とすれば

$$C(SP^k(X)) \approx C(SP^{k-1}(X)) + U_k$$

である．

6. 2. [系]

$$C(SP^n(X)) \approx \sum_{k=0}^{n} U_k$$

$$C(SP^\infty(X)) \approx \sum_{k=0}^{\infty} U_k$$

6. 3. [系]

$$H^*(SP^\infty(X)) \approx \sum_{k=0}^{\infty} H^*(U_k)$$

$$H^*(U_k) \approx H^*(SP^k(X), SP^{k-1}(X))$$

7. reduced power operation と対称積との関係

次に **3.** で定義した reduced power operation の構成では，$H^r(W \otimes_\pi M^n)$ の元が本質的な働きをしているのであるが，これと対称積との関係は今のところ，$H^r(W \otimes_\pi M^n) \to H^r(SP^n(M))$ という準同型写像が定義出来るということだけしかいえない．W は Π-free な acyclic complex であれば何でもよいので，$H^r(W \otimes_\pi M^n)$ は W の選び方に無関係であって，$(x_1, \ldots\ldots, x_n) \in M^n$ の元に $[x_1, \ldots\ldots, x_n] \in SP^n$

(M) の元を対応させてゆけば，$H^r(W\otimes_\pi M^n)\to H^r(SP^n(M))$ という準同型写像がひきおこされる．特に Π が位数 p の巡回群である時に，この写像が r の充分大きい値に対してのみ同型になることがわかると，対称積から reduced power operation が導かれ，従って Eilenberg-MacLane 複体との関係もつくのである．

例えば，$p=2$, $\theta=0$ のとき，Π は位数 2 の巡回群であってその生成元を x とする．$H^q(K;\ Z_2)\ni\bar{u}$ の代表元を u として，**3** において $v=0$ であって M は u から生成される．W としては最も簡単な複体として，次元 i に対して一つの元 e_i を生成元にもつようなものを考えると，境界作用素に対しては

$$\partial e_{2i}=(1+x)e_{2i-1},\quad \partial e_{2i+1}=(x-1)e_{2i}$$

である．このとき，$e_m\otimes_\pi u^2$ は $H^{2q-m}(W\otimes_\pi M^2\otimes Z_2)$ の cocycle で $\delta(e_m\otimes_\pi u^2)=(-1)^m 2e_{m-1}\otimes_\pi u^2$ となり，u に対して $u\smile_m u$ なる cup 積を対応させると $\Phi(e_m\otimes_\pi u^2)=Sq^{q-m}(\bar{u})\in H^{2q-m}(K;\ Z_2)$ である．一方 $S_q^{q-m}: H^q(K;\ Z_2)\to H^{2q-m}(K;Z_2)$ は $\theta(q,\ Z_2;\ 2q-m,\ Z_2)\approx H^{2q-m}(Z_2,\ q;\ Z_2)$ の元である．

8. むすび

以上 cohomology 作用素の構成について，二つの方法をのべ，その間の関係が，対称積によって与えられることを示した．この報告は問題の完全な解決にまで至っていないが，**7.** にのべた同型の問題はむづかしくて，まだいろいろなすべきことがあるように思われる．こゝでは，この機会に問題の見通しをつけ，それに必要な定理を適当な形でのべ，証明することを試みた．

参　考　文　献

[1] J. Adem, The iteration of Steenrod squares in algebraic topology, Proc. Nat. Acad. Sci., 38 (1952), 720–726.

[2] ——, Relations on iterated reduced powers, ibid., 39 (1953), 636–638.

[3] ——, The relations on Steenrod power of cohomology classes, Algebraic geometry and topology (A symposium in honor of S. Lefschetz), Princeton University Press, 1956.

[4] H. Cartan, Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane $H(\Pi, n)$, Proc. Nat.

Acad. Sci., 40 (1954), 467–471 and 704–707.

[5] ——, Sur L'iteration des opérations de Steenrod, Comment. Math. Helv., 29 (1955), 40–58.

[6] ——, Séminaire H. Cartan 1954/1955, Paris.

[7] A. Dold and R. Thom, Quasi- faserungen und unendliche symmetrische Produkte, Ann. of Math., 67 (1958), 239–281.

[8] S. Eilenberg, Cohomology and continuous mappings, Ann, of math., 41 (1940), 231–251.

[9] S. Eilenberg and S. MacLane, Relations between homology and homotopy groups, Proc. Nat. Acad. Sci., 29 (1943), 155–158; 46 (1945), 480–509.

[10] ——, On the groups $H(\mathrm{II}, n)$, I–III, Ann. of Math., 58 (1953), 55–106; 60 (1954), 49–139; 60 (1954), 513–557.

[11] I. M. James, Reduced product spaces, Ann. of Math., 62 (1955), 170–197.

[12] J. Milnor, The Steenrod algebra and its dual, Ann. of Math., 67 (1958), 150–171.

[13] J. P. Serre, Cohomologie mod 2 des complex d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math. Helv., 27 (1953), 198–231.

[14] N. E. Steenrod, Products of cocycles and extensions of mappings, Ann. of Math., 48 (1947), 290–320.

[15] ——, The topology of fibre bundles, Princeton University Press, 1951.

[16] ——, Reduced powers of cohomology classes, Ann. of Math., 56 (1952), 47–67.

[17] ——, Homology groups of symmetric groups and reduced power operations, Proc. Nat. Acad. Sci., 39 (1953), 213–223.

[18] ——, Cohomology operations derived from the symmetric groups, Comment. Math. Helv., 31 (1957), 195–218.

[19] ——, Cohomology operations, and obstructions to extending continuous functions, colloquium lectures, 1957.

[20] N. E. Steenrod and P. E. Thomas, Cohomology operations derived from cyclic groups, Comment. Math. Helv., 32 (1957), 129–152.

[21] P. E. Thomas, A generalization of the Pontrjagin square cohomology operations, Proc. Nat. Aced. Sci., 42 (1956), 266–269.

[22] ——, The generalized Pontrjagin cohomology operations and rings with divided power, Memoirs Amer. Math. Soc., 1957.

Résumé

On the construction of the cohomology operations

By
Aiko Negishi

There are two methods of constructing the cohomology operations. The first which is given by N. E. Steenrod is defined by the n-th powers of complexes and the action of the cyclic group on the factors; i.e. the reduced power operations. The second makes use of the Eilenberg-MacLane complexes. Each method has its own advantage. But we could bring the two methods together in one. The basis for this is the theorem by A. Dold and R. Thom. Their assertion, in a word, is that there are isomorphisms $\pi_i(SP^\infty(X)) \approx H_i(X)$, $i \geqq 1$, where $SP^\infty(X)$ is the infinite symmetric product of a space X. This offers an entirely new method of constructing Elenberg-MacLane complexes. And we can define a homomorphism $H^r(W \otimes_\pi M^n) \to H^r(SP^n(M))$, where $H^r(W \otimes_\pi M^n)$ is the cohomology group that determins the reduced power operations. These facts give us a clue for solving the problem.